IV. Olympiade der Jungen Mathematiker der DDR 1965

Lösungshinweise und Punktbewertungstabelle

Zentrale Olympiade-Olympiadeklasse 11/12 - 1.Tag

1. Angenommen, die reelle Zahl ξ sei eine Lösung der Gleichung. **7 Punkte**

Da die Radikanden nicht negativ sein dürfen und $\sqrt{p+\xi} + \sqrt{p-\xi} \geqq 0$ ist, gilt $0 \leqq \xi \leqq p$. Durch zweimaliges Quadrieren von

$$\sqrt{p+\xi} + \sqrt{p-\xi} = \xi$$ erhält man

$$\xi^4 + \xi^2 (4 - 4p) = 0.$$

Für $p \leqq 1$ ist also notwendig $\xi = 0$. Für $p \leqq 1$ kann es also ausser $\xi = 0$ keine Lösung geben.

Für $p > 1$ könnten $\xi = 0$ und $\xi = 2\sqrt{p-1}$ Lösungen sein.

<u>Probe:</u> Für $0 < p \leqq 1$ ist $x = 0$ keine Lösung.

Für $p > 1$ ist $x = 0$ auch keine Lösung. Für $p > 1$ ist

$$s = \sqrt{p + 2\sqrt{p-1}} + \sqrt{p - 2\sqrt{p-1}}$$
$$= \sqrt{(\sqrt{p-1} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{p-1} - 1)^2}$$

und wir erhalten für $1 < p < 2$

$$s = \sqrt{p-1} + 1 + 1 - \sqrt{p-1} = 2 \neq 2\sqrt{p-1}.$$

Für $p \geqq 2$ ist

$$s = \sqrt{p-1} + 1 + \sqrt{p-1} - 1 = 2\sqrt{p-1}.$$

Im Fall $p \geqq 2$ ist also $x = 2\sqrt{p-1}$ die einzige Lösung der Gleichung. Im Fall $0 < p \leqq 2$ hat die Gleichung keine Lösung.

2. Es gilt: **5 Punkte**

$$z = 1963^{1965} - 1963 = 1963\,(1963^{1964} - 1)$$
$$= 1963\,(1963^{982} + 1)(1963^{491} + 1)$$
$$\cdot(1963^{491} - 1).$$

Wegen $a^k - 1 = (a-1)(a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + 1)$ für jedes positive ganze k

ES 10 H • Bestell-Nr. 30 01 60-1 • Lizenz Nr. 203 • 1000/65

Zu 2.

und $a^k + 1 = (a + 1)(a^{k-1} - a^{k-2} + - \dots + 1)$

für jede ungerade natürliche Zahl k,

gilt: $z = 1962 \cdot 1963 \cdot 1964 \cdot P$, wobei P das Produkt der übrigen Faktoren ist.

Wegen

$$1962 = 2 \cdot 3^2 \cdot 109$$
$$1963 = 13 \cdot 151$$
$$1964 = 2^2 \cdot 491$$

ist z durch 2; 3; 13; 109; 151; 491 teilbar.

Es ist jetzt nur noch zu untersuchen, ob z auch durch 5; 7 bzw. 11 teilbar ist.

a) <u>Teilbarkeit durch 5</u>

Es gilt: $1963 \equiv 3 \pmod 5$

und daher: $1963^2 \equiv 4 \pmod 5$

$1963^3 \equiv 2 \pmod 5$

$1963^4 \equiv 1 \pmod 5$

Wegen $1965 \equiv 1 \pmod 4$

erhält man: $z = 1963^{1965} - 1963 \equiv 3 - 3 \equiv 0 \pmod 5$.

Also gilt: $5 \mid z$.

b) <u>Teilbarkeit durch 7</u>

Es gilt: $1963 \equiv 3 \pmod 7$

$1963^2 \equiv 2 \pmod 7$

$1963^3 \equiv 6 \pmod 7$

$1963^4 \equiv 4 \pmod 7$

$1963^5 \equiv 5 \pmod 7$

$1963^6 \equiv 1 \pmod 7$

Wegen $1965 \equiv 3 \pmod 6$

erhält man: $z = 1963^{1965} - 1963 \equiv 6 - 3 \equiv 3 \pmod 7$;

daraus folgt $7 \nmid z$.

Zu 2.

c) <u>Teilbarkeit durch 11</u>

Es gilt: $1963 \equiv 5 \pmod{11}$

$1963^2 \equiv 3 \pmod{11}$

$1963^3 \equiv 4 \pmod{11}$

$1963^4 \equiv 9 \pmod{11}$

$1963^5 \equiv 1 \pmod{11}$

Wegen $1965 \equiv 0 \equiv 5 \pmod{5}$ erhält man: $z = 1963^{1965} - 1963 \equiv 1-5 \equiv -4 \pmod{11}$; daraus folgt $11 \nmid z$.

3. Die im Raum gegebene Konfiguration der zwei Parallelogramme und der vier Punkte A", B", C", D" denke man sich durch eine Parallelprojektion auf eine (Zeichen-)Ebene abgebildet. Bei jeder solchen Abbildung bleiben 8 Punkte

a) die Parallelität zweier Geraden und

b) das Teilverhältnis von je drei Punkten einer Geraden stets dann erhalten, wenn diese Geraden nicht projizierend sind. Daher kann folgende Zeichnung zur Grundlage der Betrachtungen gemacht werden: (Abb. 1)

Mit den in Abb. 1 eingetragenen Bezeichnungen gilt:

$\overrightarrow{OA} = \mathfrak{a}$ $\quad \overrightarrow{OB} = \mathfrak{b}$ $\quad \overrightarrow{OC} = \mathfrak{b} + \mathfrak{d}$ $\quad \overrightarrow{OD} = \mathfrak{d}$

$\overrightarrow{OA'} = \mathfrak{a}'$ $\quad \overrightarrow{OB'} = \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}'$ $\quad \overrightarrow{OC'} = \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' + \mathfrak{d}'$ $\quad \overrightarrow{OD'} = \mathfrak{a}' + \mathfrak{d}'$

Wegen der vorausgesetzten Gleichheit der Teilverhältnisse gilt:

$\overrightarrow{AA''} = t \cdot \overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB''} = t \cdot \overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC''} = t \cdot \overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD''} = t \cdot \overrightarrow{DD'}$,

wobei t eine durch das Teilverhältnis eindeutig bestimmte reelle Zahl ist, so dass folgt:

$\overrightarrow{OA''} = t \cdot \mathfrak{a}'$

$\overrightarrow{OB''} = \mathfrak{b} + t\,(\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' - \mathfrak{b})$,

$\overrightarrow{OC''} = \mathfrak{b} + \mathfrak{d} + t\,(\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' + \mathfrak{d}' - \mathfrak{b} - \mathfrak{d})$,

$\overrightarrow{OD''} = \mathfrak{d} + t\,(\mathfrak{a}' + \mathfrak{d}' - \mathfrak{d})$.

L 11/12; I

Zu 3.

Nun ist

$\overrightarrow{A''B''} = \overrightarrow{OB''} - \overrightarrow{OA''} = \mathfrak{b} + t\,(\mathfrak{b}' - \mathfrak{b}),$

$\overrightarrow{D''C''} = \overrightarrow{OC''} - \overrightarrow{OD''} = \mathfrak{b} + t\,(\mathfrak{b}' - \mathfrak{b}),$

somit

$\overrightarrow{A''B''} = \overrightarrow{D''C''}$, und analog erhält man

$\overrightarrow{A''D''} = \overrightarrow{B''C''}$. (1)

Damit ergibt sich:

Die Punkte A", B", C", D" sind entweder die Ecken

a) eines nicht ausgearteten Parallelogramms (sogen. allgemeiner Fall) (Abb. 1)

oder

b) sie sind paarweise voneinander verschiedene Punkte einer Geraden, die die Bedingung (1) erfüllen (Abb. 2),

oder

c) es ist B" = D", jedoch A" ≠ B", C" ≠ B", A" ≠ C" (Abb. 3)

oder

d) es ist A" = D" und B" = C", jedoch A" ≠ B" (Abb. 4) [oder A" = B" und C" = D", jedoch A" ≠ D"].

e) es ist A" = B" = C" = D" (Abb. 5).

Die Bilder zeigen, dass tatsächlich alle Fälle vorkommen können.

Ist t = 0 oder t = 1, so bilden A", B", C", D" die Ecken eines der gegebenen Parallelogramme.

L 11/12; I

Zu 3.

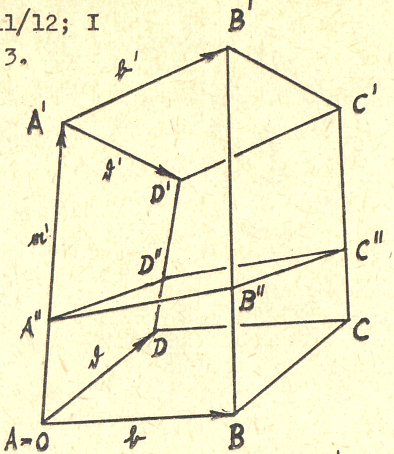

Abb. 1

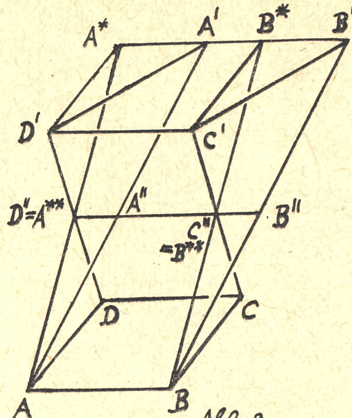

Abb. 2

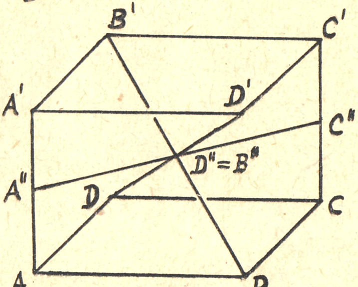

Abb. 3

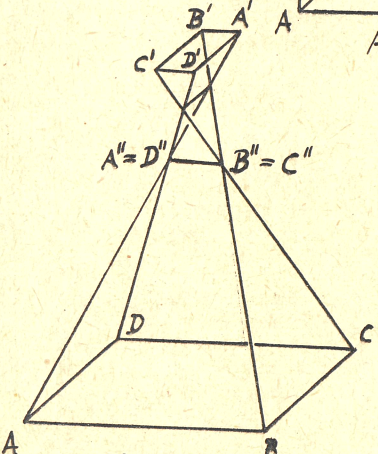

Abb. 4

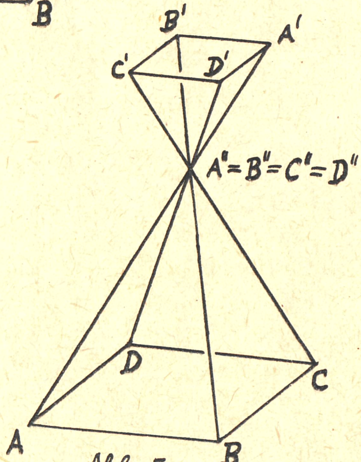

Abb. 5

IV. Olympiade der Jungen Mathematiker
der DDR 1965
Lösungshinweise und Punktbewertungstabelle

Zentrale Olympiade-Olympiadeklasse 11/12 - 2.Tag

4. Es seien 6 Punkte

ϱ : Radius des Inkreises
s : Länge der Seite des Fünfecks
P : Beliebiger Punkt
F_F: Flächeninhalt des Fünfecks

h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 : Abstände des Punktes P von den entsprechenden Seiten des Fünfecks

Fall 1) P liegt im Inneren des Fünfecks

Wegen $F_F = \frac{5s \cdot \varrho}{2}$

gilt: $\frac{5s \cdot \varrho}{2} = \frac{s}{2}(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5)$

$$5\varrho = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5$$

Fall 2) P liegt auf einer Seite des Fünfecks

OBdA sei $h_5 = 0$.

Dann gilt:

$$\frac{5s \cdot \varrho}{2} = \frac{s}{2}(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$$

$$5\varrho = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$$

P ist Eckpunkt des Fünfecks

OBdA sei $h_4 = h_5 = 0$.

Dann gilt:

$$\frac{5s \cdot \varrho}{2} = \frac{s}{2}(h_1 + h_2 + h_3)$$

$$5\varrho = h_1 + h_2 + h_3$$

Fall 3) P liegt ausserhalb des Fünfecks

DANN gilt:

$$\frac{5s \cdot \varrho}{2} < \frac{s}{2}(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5)$$

$$5\varrho < h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5$$

-2-

ES 10 H • Bestell-Nr. 30 01 60-1 • Lizenz Nr. 203 • 1000/65

L 11/12; II

Zu 4.

Der gesuchte geometrische Ort ist demnach die aus den Punkten der Seiten des Fünfecks und dessen Inneren gebildete Punktmenge.

5. Es sei $n \neq 0$ eine ~~positive~~ natürliche Zahl, für die die Gleichung (1) erfüllt ist. — 6 Punkte

Dann gilt:

$$x \cdot \underbrace{111\ldots1}_{2n \text{ Ziffern}} - y \cdot \underbrace{111\ldots1}_{n \text{ Ziffern}} = z^2 \cdot (\underbrace{111\ldots1}_{n \text{ Ziffern}})^2$$

(x, y, z natürliche Zahlen; $1 \leqq x, y, z \leqq 9$).

Wegen

$$\underbrace{111\ldots1}_{k \text{ Ziffern}} = \frac{\overbrace{999\ldots9}^{k \text{ Ziffern}}}{9} = \frac{10^k - 1}{10 - 1}$$ (k eine natürliche Zahl)

gilt

$$x \cdot \frac{10^{2n} - 1}{9} - y \cdot \frac{10^n - 1}{9} = z^2 \cdot \left(\frac{10^n - 1}{9}\right)^2$$

$$(9x - z^2)\, 10^n = 9y - 9x - z^2 . \qquad (2)$$

Angenommen, die Gleichung sei für die beiden voneinander verschiedenen natürlichen Zahlen n_1 und n_2 erfüllt.

Dann gilt

$$(9x - z^2)\, 10^{n_1} = 9y - 9x - z^2 \qquad (3)$$

$$(9x - z^2)\, 10^{n_2} = 9y - 9x - z^2 \qquad (4)$$

Subtrahiert man (4) von (3), so erhält man

$$(9x - z^2)(10^{n_1} - 10^{n_2}) = 0$$

Da aber $10^{n_1} - 10^{n_2} \neq 0$ ist, gilt

$$9x - z^2 = 0 \qquad (5)$$

Durch Einsetzen von (5) in (3) erhält man

$$9y - 9x - z^2 = 0 \qquad (6)$$

Aus (5) und (6) ergibt sich

$$x = \left(\frac{z}{3}\right)^2 \text{ und } x = \frac{y}{2} .$$

L 11/12; II

Zu 5.

Also muss z eine durch 3 teilbare Zahl sein. Man erhält:

z	3	6	9
x	1	4	9
y	2	8	keine Lösung

Für die Wertetripel (1;2;3) und (4;8;6) sind (5) und (6) erfüllt. Wegen (2) ist in diesen Fällen dann auch (1), und zwar für jede beliebige ~~positive~~ natürliche Zahl $n \neq 0$ erfüllt.

6. Aus dem Kosinussatz ergibt sich 8 Punkte

$$\cos\alpha = \frac{1}{2bc}(b^2+c^2-a^2) = \frac{1}{2abc}(ab^2+c^2a-a^3),$$

$$\cos\beta = \frac{1}{2ca}(c^2+a^2-b^2) = \frac{1}{2abc}(bc^2+a^2b-b^3),$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{2ab}(a^2+b^2-c^2) = \frac{1}{2abc}(ca^2+b^2c-c^3).$$

Damit hat man

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$$

$$= \frac{1}{2abc}(ab^2+bc^2+ca^2+a^2b+b^2c+c^2a-a^3-b^3-c^3-3abc+3abc)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2abc}(ab^2+bc^2+ca^2+a^2b+b^2c+c^2a-3abc-a^3-b^3-c^3).$$

Wird der eingeklammerte Ausdruck der letzten Zeile mit d bezeichnet, dann ist die behauptete Ungleichung gleichwertig mit der Ungleichung $d \leqq 0$. Es ist

$$d = ab^2+bc^2+ca^2+a^2b+b^2c+c^2a-2abc-a^3-b^3-c^3-abc$$

$$= (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)-abc.$$

Nun gilt

$$a+b-c > 0,\ a-b+c > 0,\ -a+b+c > 0$$

und

L 11/12; II

Zu 6.

$$(1)\quad \begin{cases} (a+b-c)(a-b+c) = a^2-(b-c)^2 \leqq a^2 \\ (a-b+c)(-a+b+c) = b^2-(c-a)^2 \leqq b^2 \\ (-a+b+c)(a+b-c) = c^2-(a-b)^2 \leqq c^2 \end{cases}$$

Folglich ist

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \leqq abc$$

oder also $d \leqq 0$. Dabei gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn es in jeder der Ungleichungen (1) steht, also wenn $a = b = c$, d.h., wenn das Dreieck gleichseitig ist.