

11/12; I

IV. Olympiade der Jungen Mathematiker
der DDR 1965

Zentrale Olympiade-Olympiadeklasse 11/12 - 1. Tag

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Der Lösungsweg (einschliesslich Nebenrechnungen, Konstruktionen von Hilfslinien usw.) muss deutlich zu erkennen sein.

1. Geben Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{p+x} + \sqrt{p-x} = x$$

an, wobei p eine positive reelle Zahl (Parameter) bedeutet.

2. Es ist zu entscheiden, durch welche der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 151, 491 die Zahl

$$z = 1963^{1965} - 1963$$

teilbar ist.

3. Im dreidimensionalen Raum sind zwei Parallelelogramme ABCD und A'B'C'D' gegeben. Jedes Parallelelogramm sei nicht entartet, d.h., seine 4 Eckpunkte sollen nicht auf ein und derselben Geraden liegen. Die durch die Parallelelogramme bestimmten Ebenen brauchen nicht voneinander verschieden zu sein. Die Strecken AA', BB', CC' und DD' seien in demselben Verhältnis geteilt; die Teilpunkte seien A", B", C", D".

Welche Aussagen kann man über die aus den Punkten A", B", C", D" gebildete Figur machen?

IV. Olympiade der Jungen Mathematiker
 der DDR 1965

Zentrale Olympiade-Olympiadeklasse 11/12 - 2. Tag

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Der Lösungsweg (einschliesslich Nebenrechnungen, Konstruktionen von Hilfslinien usw.) muss deutlich zu erkennen sein.

4. Ermitteln Sie den geometrischen Ort aller Punkte der Ebene, für die die Summe der Entfernungen von den Seiten eines in dieser Ebene gegebenen regelmässigen Fünfecks oder ihren Verlängerungen fünfmal so gross wie der Radius des dem Fünfeck einbeschriebenen Kreises ist!
5. Ermitteln Sie alle Zifferntripel (x, y, z) mit $xyz \neq 0$, mit denen

$$\underbrace{(\overline{xxx\dots x})}_{2n \text{ Ziffern}} - \underbrace{(\overline{yyy\dots y})}_{n \text{ Ziffern}} = \underbrace{(\overline{zzz\dots z})}_{n \text{ Ziffern}} \quad (1)$$

für mindestens zwei voneinander verschiedene positive natürliche Zahlen n erfüllt ist! Geben Sie sodann alle Zahlen n an, für die (1) mit den ermittelten Tripeln gilt!

6. Es ist folgender Satz zu beweisen:
 Sind α , β und γ die Winkel eines Dreiecks, dann gilt

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen?