Nitkowski, Helmut 12

11,12; I

IV. Olympiade der Jungen Mathematiker
der DDR 1965
Bezirksolympiade - Olympiadeklasse 11 u.12 - 1.Tag

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Der Lösungsweg (einschliesslich Nebenrechnungen, Konstruktionen von Hilfslinien usw.) muss deutlich zu erkennen sein.

V 1. In einem mathematischen Zirkel einigen sich sechs Teilnehmer auf eine reelle Zahl a, die der siebente Teilnehmer, der vorher das Zimmer verlassen hatte, bestimmen soll. Nach seiner Rückkehr erhält er die folgenden Auskünfte:
   1. a ist eine rationale Zahl.
   2. a ist eine ganzrationale Zahl, die durch 14 teilbar ist.
   3. a ist eine reelle Zahl, deren Quadrat gleich 13 ist.
   4. a ist eine ganzrationale Zahl, die durch 7 teilbar ist.
   5. a ist eine reelle Zahl, die die folgende Ungleichung erfüllt: $0 < a^3 + a < 8\,000$.
   6. a ist eine gerade Zahl.

   Er erfährt, dass von den Auskünften 1 und 2, 3 und 4 sowie 5 und 6 jeweils eine wahr und eine falsch ist. Wie lautet die Zahl a? Wie hat der siebente Teilnehmer die Zahl ermittelt?

2. Es sei $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ mit reellen Zahlen a, b, c, d als Koeffizienten ($c \neq 0$). Für welche reellen Zahlen x wird durch die Zuordnung $x \to y = f(x)$ eine Funktion definiert? Ohne Anwendung der Differentialrechnung ist anzugeben, welchen Bedingungen die Koeffizienten a,b,c,d genügen müssen, damit diese Funktion in jedem ihrer Definitionsbereiche streng monoton abnehmend ist!

3. Gegeben sind in der Ebene eine Gerade g und zwei Punkte A und B, die nicht auf g, jedoch in derselben durch g bestimmten Halbebene liegen. Durch Konstruktion (mit Zirkel und Lineal) ist ein Punkt P auf g zu finden, von dem aus die Strecke AB unter einem möglichst grossen Winkel erscheint, d.h. für den $\sphericalangle APB \geqq \sphericalangle AQB$ für alle $Q \in g$ gilt.

Bestell-Nr. 30 01 65-1

11,12; II

IV. Olympiade der Jungen Mathematiker der DDR 1965

Bezirksolympiade - Olympiadeklasse 11 und 12 -2.Tag

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Der Lösungsweg (einschliesslich Nebenrechnungen, Konstruktionen von Hilfslinien usw.) muss deutlich zu erkennen sein.

4. Für welche reellen Zahlen x ist die Gleichung

$$\tan^2 x + \cot^2 x = 6$$

erfüllt?

5. Gibt es eine natürliche Zahl z, die auf zwei verschiedene Weisen in der Form

$$z = x! + y!$$

dargestellt werden kann, wobei x und y von Null verschiedene natürliche Zahlen sind und $x \leq y$ ist?

6. Gegeben sind im dreidimensionalen Anschauungsraum drei Kreise, die einander paarweise in drei verschiedenen Punkten berühren, d.h. je zwei Kreise haben genau einen gemeinsamen Punkt und in diesem Punkt eine gemeinsame Tangente.
Es ist zu beweisen, dass unter diesen Voraussetzungen die drei Kreise entweder in einer Ebene oder auf der Oberfläche einer Kugel liegen.

Bestell-Nr. 30 01 65-1