IV. Olympiade
der Jungen Mathematiker der DDR 1965

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungshinweise und Punktbewertungstabelle

Olympiadeklassen 11 und 12. 1. Tag Gesamtpunktzahl: 40 Punkte

Achtung: Die im Vorspann zu den Lösungshinweisen der 1. Stufe zu findenden Bemerkungen gelten auch für die 2. Stufe.

1. a) Denkt man sich den gegebenen Würfel in acht gleichgroße Teilwürfel zerlegt, so ist im Falle a) das Volumen jeder der acht abgeschnittenen Pyramiden gleich einem Sechstel des Volumens eines Teilwürfels. Die Summe der Volumina der abgeschnittenen Pyramiden ist also **3 P.**

$$S = 8 \cdot \frac{a^3}{8 \cdot 6} = \frac{a^3}{6}.$$

Das gesuchte Volumen des Restkörpers beträgt daher

$$V = a^3 - \frac{a^3}{6} = \frac{5}{6}a^3.$$

b) Dieser Fall läßt sich auf den vorigen zurückführen, wobei zu beachten ist, daß die Seitenlänge b des regelmäßigen Achtecks wegen **3 P.**

$$b^2 = 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$b = a\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

ist. Berücksichtigt man ferner, daß die an jeder Ecke abgeschnittenen Pyramiden einander kongruent und den Pyramiden des Falles a) ähnlich sind, so ergibt sich das Gesamtvolumen der abgeschnittenen Pyramiden

$$S' = \frac{a^3}{6}\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^3 = \frac{a^3}{3}\left(10 - 7\sqrt{2}\right).$$

Das gesuchte Volumen des Restkörpers beträgt also in diesem Falle

$$V' = a^3 - \frac{a^3}{3}\left(10 - 7\sqrt{2}\right) = \frac{7}{3}\left(\sqrt{2} - 1\right)a^3.$$

c) Durch das Abschneiden aller vier an einer Seitenfläche gelegenen Ecken entstehen auf jeder Seite dieser Fläche höchstens zwei Schnittpunkte. Daher kann für das regelmäßige n-Eck n höchstens gleich acht sein. Es können aber auch die zwei Schnittpunkte jeder Seite zusammenfallen. Also muß für das regelmäßige n-Eck n mindestens gleich vier sein. Möglich wären zunächst auch $n = 5$, 6 oder 7. **2 P.**

Nun ist $n = 5$ nicht möglich. Einem Quadrat kann ein regelmäßiges Fünfeck nicht einbeschrieben werden. Zu einem regelmäßigen Fünfeck ABCDE (Abb. 5a) gibt es nämlich genau ein Rechteck PQRS, so daß die Punkte C und D des Fünfecks auf einer Rechteckseite und die übrigen Punkte des Fünfecks auf den anderen Rechteckseiten liegen. Bezeichnet man mit F die Mitte der Seite $\overline{CD}$ und mit G die Mitte der Seite $\overline{BC}$, so gilt

$$\overline{QR} = \overline{AF} = \overline{EG}$$

$$\overline{PQ} = \overline{EB} > \overline{EG}$$

also
$$\overline{PQ} > \overline{QR},$$

d. h., das Rechteck ist kein Quadrat. Daraus folgt, daß man einem Quadrat ein regelmäßiges Fünfeck nicht einbeschreiben kann.

Der Fall $n = 6$ ist ebenfalls nicht möglich (Abb. 5 b).

Es ist nämlich im Dreieck FES die Hypotenuse FE länger als die Kathete $\overline{FS}$. Es gilt aber

$$\overline{FC} = \overline{SR} = 2\,\overline{FE}$$

und
$$\overline{SP} = 2\,\overline{FS}$$

und folglich $\overline{SR} > \overline{SP}$.

Das Rechteck PQRS ist also kein Quadrat.

Schließlich ist $n = 7$ nicht möglich, da ein regelmäßiges Siebeneck kein Paar paralleler Seiten enthält.

2. Es ist $1049 \cdot 58 = 60842 = 31 \cdot 1965 - 73$. **7 P.**

Daher ist

$$z_n = 73^n + 1049 \cdot 58^n = 73^n + (31 \cdot 1965 - 73) \cdot 58^{n-1}$$
$$= 73\,(73^{n-1} - 58^{n-1}) + 31 \cdot 1965 \cdot 58^{n-1}.$$

Da $n - 1 = 2k$ eine gerade Zahl mit $k \geqq 0$ ist, folgt
$73^{n-1} - 58^{n-1} = (73^2)^k - (58^2)^k = 5329^k - 3364^k$.
Diese Zahl ist durch $5329 - 3364 = 1965$ teilbar.
Also ist auch z_n durch 1965 teilbar.

3. Es ist **7 P.**

$$\begin{aligned} a^4 - 4ac^3 + 3c^4 &= a^4 - 2a^2c^2 + c^4 + 2a^2c^2 - 4ac^3 + 2c^4 \\ &= (a^2 - c^2)^2 + 2c^2\,(a^2 - 2ac + c^2) \\ &= (a^2 - c^2)^2 + 2c^2\,(a-c)^2 \geqq 0. \end{aligned}$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $a = c$ ist.

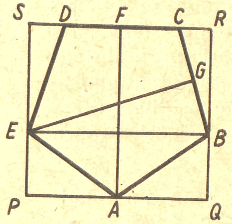

Abbildung 5a

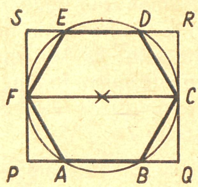

Abbildung 5b

IV. Olympiade
der Jungen Mathematiker der DDR 1965
2. Stufe (Kreisolympiade)

Olympiadeklassen 11 und 12. 2. Tag Gesamtpunktzahl: 40 Punkte

Achtung: Die im Vorspann zu den Lösungshinweisen der 1. Stufe zu findenden Bemerkungen gelten auch für die 2. Stufe.

4. Es ist **6 P.**

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}} \qquad \cot \frac{x-y}{2},$$

da wegen

$$x + y = 90^\circ \text{ hier } \sin \frac{x+y}{2} = \cos \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ ist.}$$

Ferner ist $\frac{x-y}{2} \quad \frac{x}{2} - \left(45^0 - \frac{x}{2}\right) = x - 45^0.$

Also ist das Gleichungssystem für alle x und y erfüllt, für die $\cot(x - 45^\circ) = \frac{5}{3}$ und $y = 90^\circ - x$ ist.

Aus einer vierstelligen Tafel erhält man

$x - 45^\circ \approx 31^\circ + k \cdot 180^\circ$ (k ganzzahlig)
$x \approx 76^\circ + k \cdot 180^\circ$
$y \approx 14^\circ - k \cdot 180^\circ$.

Falls ein Lösungsweg gewählt wird, bei dem die beiden Seiten einer Zwischengleichung quadriert werden, gehört zu einer vollständigen Lösung das Ausscheiden der nicht die Ausgangsgleichung erfüllenden Werte.

5. Wir nehmen an, daß P der gesuchte Punkt im Innern des Dreiecks ABC sei (also **7 P.**

$$\sphericalangle APB \cong \sphericalangle BPC \cong \sphericalangle CPA \cong \frac{4}{3} R, \qquad R\text{: rechter Winkel).}$$

Den Kreis durch A, P, B bezeichnen wir mit K, den Kreis durch A, P, C mit K'. M sei der Mittelpunkt von K, M' der Mittelpunkt von K'.

Nach dem Satz vom Peripheriewinkel gilt $\sphericalangle AMB \cong \frac{4}{3} R$ und daher $\sphericalangle MAB \cong \frac{R}{3}$.

Man zeichnet also in dem Dreieck ABC die Mittelsenkrechte von AB und trägt in A an $\overline{AB}$ nach außen einen Winkel von 30° an, dessen freier Schenkel die Mittelsenkrechte in M schneidet (Abb. 6 s. Rücks.).

Analog konstruiert man M'. Die Kreise um M bzw. M' mit den Radien $\overline{MA}$ bzw. $\overline{M'A}$ schneiden einander außer in A in einem weiteren Punkt P (Berührung kann nicht eintreten, da hierbei $\sphericalangle$ BAC $\cong \frac{4}{3}$ R sein müßte, was der Voraussetzung widerspricht). Der Schnittpunkt P liegt entweder

a) im Innern des Winkels BAC oder

b) im Innern des zugehörigen Scheitelwinkels.

a) Angenommen, P läge im Innern des Winkels BAC, aber nicht im Innern des Dreiecks ABC. Dann wäre die Summe der Innenwinkel des Vierecks ABPC größer als 4 R, im Widerspruch zum Satz über die Winkelsumme im Viereck.

b) Angenommen, P läge im Innern des zugehörigen Scheitelwinkels. Dann gälte nach dem Satz vom Peripheriewinkel

$$\sphericalangle \text{APB} \cong \sphericalangle \text{APC} \cong \frac{2}{3}\text{R}, \text{ also } \sphericalangle \text{BPC} \cong \frac{4}{3}\text{R}.$$

Da das Dreieck BAC im Innern des Dreiecks BPC liegt, gälte

$$\sphericalangle \text{ABC} + \sphericalangle \text{BCA} < \sphericalangle \text{PBC} + \sphericalangle \text{PCB} \cong \frac{2}{3}\text{R},$$

$$\text{also } \sphericalangle \text{BAC} > \frac{4}{3}\text{R}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

Es bleibt also nur der Fall, daß P im Innern des Dreiecks ABC liegt. Nach der Konstruktion ist

$$\sphericalangle \text{APB} \cong \sphericalangle \text{APC} \cong \frac{4}{3}\text{R und}$$

$$\sphericalangle \text{BPC} \cong 4\text{ R} - \frac{8}{3}\text{R} \cong \frac{4}{3}\text{R}.$$

6. Alle Punkte, die der ersten Ungleichung genügen, liegen innerhalb des Kreises vom Radius r um den Ursprung. **5 P.**

Alle Punkte, die der zweiten Ungleichung genügen, liegen

entweder oberhalb der Geraden $y = x + \frac{r}{2}$

oder unterhalb der Geraden $y = x - \frac{r}{2}$.

Daher liegen diejenigen Punkte, die beiden Ungleichungen genügen, im Innern der beiden in der Abbildung 7 schraffierten Kreissegmente.

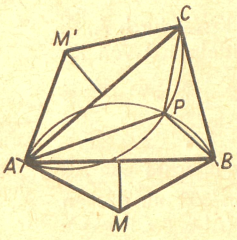

Abbildung 6

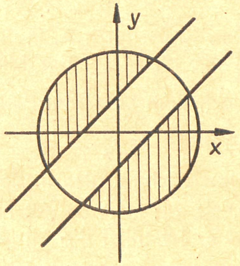

Abbildung 7

ES 10 H · Bestell-Nr. 30 01 25–1 · Lizenz Nr. 203 · 1000/64 (E)
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
Satz: VEB (K) Druckerei Hohen Neuendorf (I-3-10)
Druck: Bärendruck, Berlin