IV. Olympiade
der Jungen Mathematiker der DDR 1965

2. Stufe (Kreisolympiade)

Olympiadeklassen 11 und 12. 1. Tag

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen beziehungsweise zu begründen. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen von Hilfslinien usw.) muß deutlich zu erkennen sein.

1. Von einem Würfel mit der Kantenlänge a werden alle Ecken durch ebene Schnitte so abgetrennt, daß aus allen Seitenflächen des Würfels kongruente regelmäßige Vielecke entstehen.

   Es ist der Rauminhalt des Restkörpers zu berechnen. Unterscheiden Sie die folgenden Fälle:

   a) Es entstehen regelmäßige Vierecke.

   b) Es entstehen regelmäßige Achtecke.

   c) Gibt es noch andere Möglichkeiten?

2. Es ist zu beweisen, daß alle Zahlen der Form
$$73^n + 1049 \cdot 58^n$$
– wobei n eine ungerade natürliche Zahl ist – durch 1965 teilbar sind.

3. Es ist zu zeigen, daß für alle reellen Zahlen a und c die Ungleichung $a^4 - 4ac^3 + 3c^4 \geqq 0$ richtig ist. Wann gilt das Gleichheitszeichen?

ES 10 H · Bestell-Nr. 30 01 25–1 · Lizenz Nr. 203 · 1000/64 (E)
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
Satz: VEB (K) Druckerei Hohen Neuendorf (I-3-10)
Druck: Bärendruck, Berlin

IV. Olympiade
der Jungen Mathematiker der DDR 1965

2. Stufe (Kreisolympiade)

Olympiadeklassen 11 und 12. 2. Tag

4. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{5}{3}$$

$$x + y = 90°!$$

(Es soll eine Näherungslösung mit ganzzahligen Gradzahlen angegeben werden.)

5. In einem spitzwinkligen Dreieck A, B, C ist der Punkt P zu konstruieren, von dem aus alle Seiten des Dreiecks unter gleichgroßen Winkeln erscheinen (d. h. $\sphericalangle BPA \cong \sphericalangle CPB \cong \sphericalangle CPA$).

6. Bestimmen Sie in der xy-Ebene die Menge aller Punkte, deren Koordinaten den beiden Ungleichungen

$x^2 + y^2 < r^2$ und $|y-x| > \frac{r}{2}$ genügen $(r > 0)$!

ES 10 H · Bestell-Nr. 30 01 25–1 · Lizenz Nr. 203 · 1000/64 (E)
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
Satz: VEB (K) Druckerei Hohen Neuendorf (I-3-10)
Druck: Bärendruck, Berlin