IV. Olympiade der Jungen Mathematiker der DDR 1965

Lösungshinweise und Punktbewertungstabelle

Zentrale Olympiade - Olympiadeklasse 10 - 1. Tag

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungshinweisen der 1. Stufe gelten auch für die Zentrale Olympiade.

---

1. Es werden von der ersten Sorte a, von der zweiten b und von der dritten c Stück gekauft. — 5 Punkte

   Dann gilt: $a + b + c = 30$ und
   $$30a + 24b + 18c = 600.$$
   Man erhält: $c = 30 - a - b$, $b = 10 - 2a$ und damit für a: $1 \leqq a \leqq 4$.

   Durch Einsetzen der Zahlen 1, 2, 3, 4 für a erhält man folgende Zahlentripel

a	1	2	3	4
b	8	6	4	2
c	21	22	23	24

   Das sind die vier Möglichkeiten.

2. Angenommen, die reelle Zahl ξ genüge der gegebenen Ungleichung: — 7 Punkte
   $$\frac{\xi}{p} - \frac{2p}{\xi} < 2 .$$
   I. Ist $\xi > 0$, so liefert die Multiplikation mit $p\xi$
   $$\xi^2 - 2p^2 < 2p\xi$$
   $$(\xi - p)^2 < 3p^2$$
   a) Für $\xi > p$ ergibt sich
   $$\xi - p < p\sqrt{3}$$
   $$\xi < p\,(1 + \sqrt{3})$$
   b) Für $\xi < p$ ergibt sich
   $$p - \xi < p\sqrt{3}$$
   $$\xi > p\,(1 - \sqrt{3})$$
   Die ξ-Werte $p\,(1 - \sqrt{3}) < \xi \leqq 0$ fallen wegen der Annahme $\xi > 0$ weg.

-2-

L 10; I

Zu 2.

II. Ist $\xi < 0$, so liefert die Multiplikation mit $p\xi$

$$\xi^2 - 2p^2 > 2p\xi$$

$$(\xi - p)^2 > 3p^2$$

Da nach Voraussetzung $p > 0$ ist, folgt nur

$$p - \xi > p\sqrt{3}$$

$$\xi < p\,(1 - \sqrt{3})$$

III. $\xi = 0$ ist nicht möglich.

Als Lösungen kommen also nur reelle Zahlen aus den folgenden offenen Intervallen in Frage:

I. $\xi \in (0,\ldots p(1 + \sqrt{3}))$

II. $\xi \in (-\infty,\ldots p(1 - \sqrt{3}))$

Existenzbeweis:

I. $0 < \xi < p\,(1 + \sqrt{3})$

$$\frac{\xi}{p} - \frac{2p}{\xi} < 1 + \sqrt{3} - \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = 2$$

II. $-\infty < \xi < p\,(1 - \sqrt{3})$

$$\frac{\xi}{p} - \frac{2p}{\xi} < 1 - \sqrt{3} - \frac{2}{1 - \sqrt{3}} = 2$$

3. Aus der Voraussetzung folgt: 7 Punkte

a) $a + b + c \equiv 0 \pmod 2$ und b) $a + b + c \equiv 0 \pmod 3$

Wegen a) sind entweder alle drei Zahlen gerade, damit sind auch die Kuben und deren Summe gerade; oder genau eine der Zahlen ist gerade, dann sind zwei Kuben ungerade, die dritte gerade; die Summe x ist dann durch 2 teilbar.

Wenn b) gilt, dann gilt auch $(a+b+c)^3 \equiv 0 \pmod 3$ und damit $a^3+b^3+c^3+6abc + 3a^2b+3a^2c+3ab^2$

$$+ 3ac^2+3b^2c+3bc^2 \equiv 0 \pmod 3.$$

Daraus folgt aber, dass $a^3+b^3+c^3 \equiv 0 \pmod 3$ gilt.

Die Überlegung zeigt, dass $a^3+b^3+c^3 \equiv 0 \pmod 2$ und $\equiv 0 \pmod 3$, d.h. $a^3+b^3+c^3 \equiv 0 \pmod 6$.

IV. Olympiade der Jungen Mathematiker
der DDR 1965
Lösungshinweise und Punktbewertungstabelle

Zentrale Olympiade - Olympiadeklasse 10 - 2. Tag

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungshinweisen der 1. Stufe gelten auch für die Zentrale Olympiade.

4. Fall I: $M = A$ 8 Punkte

Die Relation reduziert sich auf

$\overline{BA}^2 \cdot \overline{AC}^2 = \overline{CA}^2 \cdot \overline{AB}^2$;

sie ist identisch erfüllt.

Fall II: $M = B$

Die Relation reduziert sich auf

$\overline{AB}^2 \cdot \overline{BC}^2 = \overline{CB}^2 \cdot \overline{AB}^2$;

sie ist identisch erfüllt.

Fall III: $M \neq A$, $M \neq B$

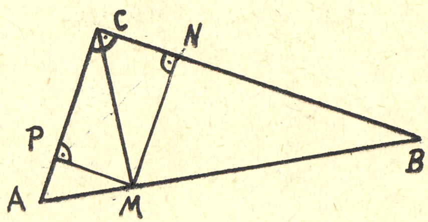

Abbildung 1

Der Schnittpunkt von BC und der Senkrechten auf BC durch M sei N.
Der Schnittpunkt von AC und der Senkrechten auf AC durch M sei P.
Nach dem Satz des Pythagoras bzw. nach dem Strahlensatz gelten:

ES 10 H • Bestell-Nr. 30 01 60-1 • Lizenz Nr. 203 • 1000/65

L 10; II

Zu 4.

$$\overline{AM}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{MP}^2 \text{ und } \overline{BM}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{BN}^2 \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{sowie } \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{MP}}{\overline{BC}}\ ;\ \overline{AP} = \dfrac{\overline{MP}\cdot\overline{AC}}{\overline{BC}} \text{ und} \\ \dfrac{\overline{BN}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{MN}}{\overline{AC}}\ ;\ \overline{BN} = \dfrac{\overline{MN}\cdot\overline{BC}}{\overline{AC}} \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AM}^2\cdot\overline{BC}^2 = \overline{MP}^2\cdot\overline{AC}^2 + \overline{MP}^2\cdot\overline{BC}^2 \text{ und} \\ \overline{BM}^2\cdot\overline{AC}^2 = \overline{MN}^2\cdot\overline{AC}^2 + \overline{MN}^2\cdot\overline{BC}^2 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Durch Additidn der Gleichungen (3) ergibt sich:

$$\overline{AM}^2\cdot\overline{BC}^2 + \overline{BM}^2\cdot\overline{AC}^2 = (\overline{MP}^2 + \overline{MN}^2)(\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2).$$

Unter Berü cksichtigung von

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2\ ,$$

$$\overline{MP}^2 + \overline{MN}^2 = \overline{PN}^2 \text{ und}$$

$$\overline{PN} = \overline{CM} \quad \text{(PMNC ist ein Rechteck)}$$

erhält man die Relation.

5. ABCD sei das gegebene Tetraeder, G der Mittelpunkt der Kante CD (siehe Abbildung 2) — 7 Punkte

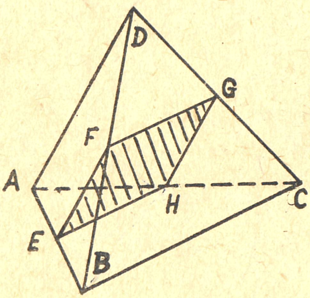

Abbildung 2

$\overline{DG} = \overline{GC} = \frac{a}{2}$

EF $\parallel$ AD und GH $\parallel$ AD

FG $\parallel$ BC und EH $\parallel$ BC

Daraus folgt nach dem Strahlensatz:

$\overline{EF} = \overline{GH} = \overline{FG} = \overline{EH} = \frac{a}{2}$.

EFGH ist also ein Rhombus.

L 10; II

Zu 5.

Da das Tetraeder ABCD laut Voraussetzung regelmässig ist, gelten:

$$\overline{EC} = \overline{BH}$$
$$\overline{BF} = \overline{GC}$$
$$\sphericalangle FBH \cong \sphericalangle GCE$$

Also gilt: $\Delta\ BFH \cong \Delta\ CGE$

und mithin $\overline{EG} = \overline{FH}$.

Daher ist EFGH ein Quadrat mit dem Flächeninhalt

$$I_{EFGH} = \frac{a^2}{4} \ .$$

6. Die Lösungen zu I) ergeben sich aus der Abbildung 3: — 6 Punkte, davon

a) 208 Schüler lesen genau eine dieser Zeitschriften. — 3 Punkte für I

b) 296 Schüler lesen mindestens eine der Zeitschriften, 4 also keine. — 3 Punkte für II

Die Lösungen zu II ergeben sich aus Abbildung 4:

x: Zahl der Schüler, die genau eine der Zeitschriften regelmässig lesen.

y: Zahl der Schüler, die mindestens eine der Zeitschriften regelmässig lesen.

z: Zahl der Schüler, die keine der Zeitschriften regelmässig lesen.

$x = a + b + c - 2\ (d + e + f) + 3g$

$y = a + b + c - \quad (d + e + f) + \quad g$

$z = \overset{s}{\cancel{a}} + d + e + f - (a + b + c + g)$

L 10; II

Zu 6.

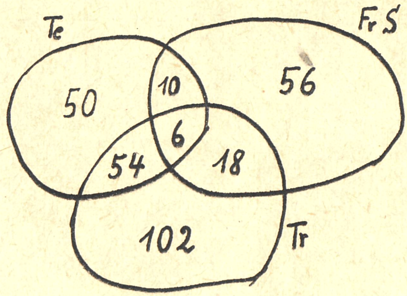

Abbildung 3

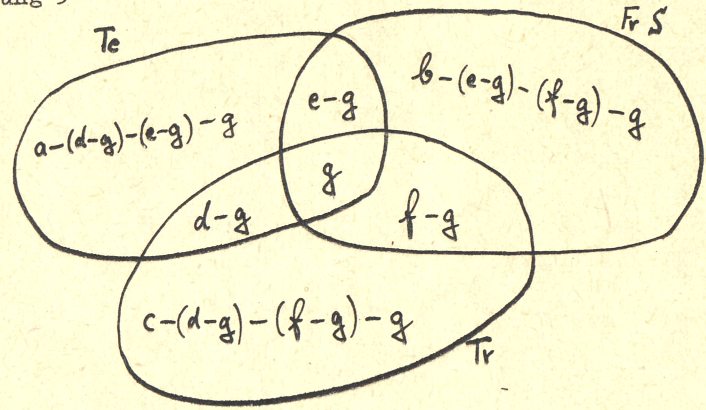

Abbildung 4