IV. Olympiade der Jungen Mathematiker der DDR 1965

Lösungshinweise und Punktbewertungstabelle

Bezirksolympiade - Olympiadeklasse 10 - 1. Tag

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungshinweisen der 1. Stufe gelten auch für die Bezirksolympiade.

1. a) Es seien: — 6 Punkte

x die Masszahl der Geschwindigkeit des Fussgängers in $\mathrm{km} \cdot \mathrm{min}^{-1}$

y die Masszahl der Geschwindigkeit des Strassenbahnzuges in $\mathrm{km} \cdot \mathrm{min}^{-1}$

a die Masszahl der Entfernung des Begegnungspunktes von B in km.

Dann gilt:

(1) $36x = 10y$

(2) $90x = 12{,}75 - a$

(3) $60y = 12{,}75 + a$

Daraus folgen:

$x = \frac{1}{12}$, $y = \frac{3}{10}$, $a = 5{,}25$.

Der Fussgänger legt in der Stunde durchschnittlich 5 km, der Strassenbahnzug in der gleichen Zeit durchschnittlich 18 km zurück.

b) Der Fussgänger wird, 3 km von A entfernt, vom Strassenbahnzug überholt und begegnet ihm, 5,25 km von B entfernt. — 2 Punkte

2. Die Quersumme der Zahl ist 300. Die Zahl ist also durch 3, nicht aber durch 9 teilbar. Daher kann sie keine Quadratzahl sein. — 6 Punkte

3. Man setze $a^2 + b^2 = y^2$. Dann ist y mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks konstruierbar. — 5 Punkte

Aus $x = \frac{y^2}{3c}$ erhält man $x \cdot 3c = y^2$ oder

$x : y = y : 3c$.

Nach dem Höhensatz ist x konstruierbar.

Bestell-Nr. 30 01 65-1

L 10; II

IV. Olympiade der Jungen Mathematiker der DDR 1965 Lösungshinweise und Punktbewertungstabelle

Bezirksolympiade - Olympiadeklasse 10 - 2. Tag

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungshinweisen der 1.Stufe gelten auch für die Bezirksolympiade.

4. Man untersucht, in welcher Antwort beide Angaben falsch sein können, ohne dass ein Widerspruch entsteht. Das ist nur bei 2) (B und F) der Fall. Bei anderen Annahmen erhält man jeweils drei Schüler mit voller Punktzahl. — 7 Punkte
   A und E haben die volle Punktzahl erreicht.

5. Voraussetzung: $3 \mid a^2 + b^2$ mit ganzen Zahlen a und b oder — 8 Punkte
   $$a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 3$$
   Behauptung: $3 \mid a$ und $3 \mid b$
   Beweis (indirekt):
   1. Fall: $a \equiv 1 \pmod 3$ d.h. $a^2 \equiv 1 \pmod 3$
      Wegen Voraussetzung müsste dann
      $$b^2 \equiv 2 \pmod 3$$
      sein, was für keine Quadratzahl möglich ist.
   2. Fall: $a \equiv 2 \pmod 3$. Der Beweis erfolgt analog.

   Also gilt:
   $3 \mid a$, was entsprechend auch für b zutrifft.

6. Verbindet man den Punkt im Innern des Tetraeders mit den Eckpunkten des Tetraeders, so erhält man vier dreiseitige Pyramiden mit gleichen Grundflächen und den Höhen a, b, c und d. Da das Volumen des Tetraeders und die Summe der Volumina der vier Teilkörper gleich sind, lässt sich die Behauptung aus diesem Zusammenhang herleiten. — 6 Punkte

Bestell-Nr. 30 01 65-1