Umlauft

IV. Olympiade der Jungen Mathematiker
der DDR 1965
Lösungshinweise und Punktbewertungstabelle

Bezirksolympiade - Olympiadeklasse 9 - 1. Tag

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungshinweisen der 1.Stufe gelten auch für die Bezirksolympiade.

1. Die auf den Auftrag bezogenen Tagesleistungen der beiden Betriebe seien a und b, die herzustellende Gesamtmenge sei p. — 5 Punkte

   Dann gilt $12\,(a+b) = p$. ✓

   In den ersten beiden Tagen wird ein Sechstel des Auftrages geschafft. Die restlichen fühf Sechstel soll das Werk B in x Tagen schaffen.

   Da $a = 1{,}5\,b$ ist, gilt ✓

   $$12 \cdot 1{,}5\,b + 12\,b = p.$$

   Daraus folgt $30\,b = p$. ✓

   Das heisst: Werk B hätte allein den Auftrag in 30 Tagen ausführen können. ✓ Die restlichen fünf Sechstel schafft es also in 25 Tagen. Die benötigten Teile stehen 27 Tage nach dem Beginn der Arbeiten in beiden Werken zur Verfügung. ✓

2. Man klammert zunächst 3 aus. ✓ — 8 Punkte

   Jeder der Summanden von der Form $\frac{2}{a\,(a+2)}$ lässt ✓✓ sich als Differenz zweier Brüche schreiben:

   $$\frac{2}{a\,(a+2)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+2}\,.$$ ✓✓✓

   Daher lautet die zu berechnende Summe

   $$x = 3\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \ldots\ldots\ \ldots\ldots - \frac{1}{31} + \frac{1}{31} - \frac{1}{33}\right)$$ ✓

   $$= 3 \cdot \frac{28}{165}$$

   $$= \frac{28}{55}$$ ✓

Bestell-Nr. 30 01 65-1

L 9; I

3. ABCD sei das geforderte Quadrat, M der Mittelpunkt des Halbkreises und E ein Endpunkt des Durchmessers. 6 Punkte

Es gilt

$$\overline{MB} : \overline{BC} = 1 : 2$$

Die Senkrechte zu AE in E schneidet die Verlängerung von MC im Punkt F.

Dann gilt

$\triangle MBC \sim \triangle MEF$

Daraus folgt:

$\overline{ME} : \overline{EF} = \overline{MB} : \overline{BC} = 1 : 2$.

Also gilt $\overline{EF} = 2\,\overline{ME}$.

3

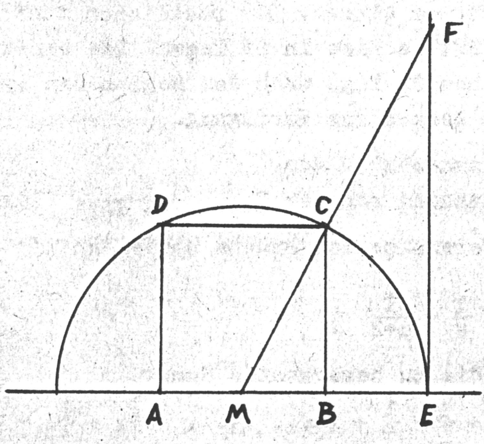
Konstruktion:

Man errichtet auf dem Durchmesser in E die Senkrechte und trägt auf ihr $\overline{EF} = 2\,\overline{ME}$ ab.

Man verbindet M mit F und erhält C als Schnittpunkt von MF mit dem Halbkreis.

3

Danach ist das Quadrat leicht zu konstruieren.



Umlauft

L 9; II

IV. Olympiade der Jungen Mathematiker
der DDR 1965
Lösungshinweise und Punktbewertungstabelle

Bezirksolympiade - Olympiadeklasse 9 - 2. Tag

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungshinweisen der 1.Stufe gelten auch für die Bezirksolympiade.

4. Bezeichnet man die erste Zahl mit n, so erhält man (7 Punkte)

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1$$
$$= (n^2 + 3n + 1)^2$$

5. Wenn Peter die Wahrheit gesagt hätte, müsste Bärbels Feststellung falsch sein, da von beiden genau einer die Wahrheit gesagt haben soll. Diese Annahme führt zum Widerspruch, da auch Peter die Zahl als irrational charakterisiert hat. Also hat Bärbel die Wahrheit gesagt. Demnach ist die Aussage von Klaus falsch und Inges Angabe stimmt. (7 Punkte)
Aus ihr folgt:
$$x = \frac{1}{\pi} .$$
Die Aussagen von Günter und Monika sind überflüssig.

6. a) Der zusammengesetzte Körper wird von 12 Flächen begrenzt, die die Form kongruenter Rhomben haben. (7 Punkte)
b) $V = a^3 + 6 \cdot \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a}{2} = 2a^3$.

Bestell-Nr. 30 01 65-1